

Spis treści

Rozdział I. Wstęp do matematyki	13
1.1. Elementy logiki i teorii zbiorów.....	13
1.1.1. Rachunek zdań.....	13
1.1.2. Reguły wnioskowania.....	16
1.1.3. Funkcja zdaniowa i kwantyfikatory.....	17
1.1.4. Działania na zbiorach.....	18
Zadania.....	20
1.2. Funkcje i relacje.....	21
1.2.1. Relacja.....	21
1.2.2. Relacja równoważności.....	22
1.2.3. Funkcja.....	24
1.2.4. Ciąg.....	24
1.2.5. Działania na funkcjach.....	25
1.2.6. Obraz i przeciwobraz.....	29
Zadania.....	31
1.3. Zbiory liczbowe.....	31
1.3.1. Liczby naturalne.....	31
1.3.2. Ciała.....	32
1.3.3. Liczby wymierne i rzeczywiste.....	34
1.3.4. Liczby zespolone.....	36
1.3.5. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.....	38
Zadania.....	42
Rozdział II. Ciągi i szeregi	44
2.1. Przestrzenie metryczne I.....	44
2.1.1. Przykłady przestrzeni metrycznych.....	44
2.1.2. Kule w przestrzeniach metrycznych.....	46
2.1.3. Zbieżność.....	48
Zadania.....	51
2.2. Ciągi.....	52
2.2.1. Własności ciągów liczbowych.....	52
2.2.2. Ciągi liczb rzeczywistych.....	53
2.2.3. Metody obliczania granic.....	55

2.2.4. Ciągi rozbieżne do nieskończoności	60
2.2.5. Ciągi ograniczone	63
Zadania	68
2.3. Szeregi	69
2.3.1. Szeregi liczbowe	69
2.3.2. Kryteria zbieżności szeregów	72
2.3.3. Szeregi potęgowe	77
2.3.4. Szeregi funkcyjne	79
2.3.5. Uzupełnienia	82
Zadania	86
Rozdział III. Ciągłość	87
3.1. Przestrzenie metryczne II	87
3.1.1. Zbiory otwarte i domknięte	87
3.1.2. Zbiory zwarte	91
3.1.3. Przestrzeń zupełna	92
3.1.4. Zasada Banacha	94
Zadania	100
3.2. Granica i ciągłość funkcji	101
3.2.1. Definicja ciągowa (Heinego)	101
3.2.2. Definicja otoczeniowa (Cauchy'ego)	105
3.2.3. Działania na funkcjach ciągłych	108
3.2.4. Przykłady	110
Zadania	117
3.3. Własności funkcji ciągłych	118
3.3.1. Własność Darboux	118
3.3.2. Funkcje ciągłe na zbiorach zwartych	121
3.3.3. Przestrzeń funkcji ciągłych	123
Zadania	127
Rozdział IV. Różniczkowalność	128
4.1. Pochodna funkcji jednej zmiennej	128
4.1.1. Definicja pochodnej	128
4.1.2. Podstawowe twierdzenia	131
4.1.3. Pochodne funkcji elementarnych	133
4.1.4. Przykłady	135
4.1.5. Pochodne wyższych rzędów	139
Zadania	142
4.2. Twierdzenia o wartości średniej i ich zastosowania	143
4.2.1. Twierdzenia o wartości średniej	143
4.2.2. Wzór Taylora	146
4.2.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	152
4.2.4. Reguła de L'Hospitala	159
4.2.5. Przybliżone rozwiązywanie równań	163
Zadania	166
4.3. Pochodne funkcji wielu zmiennych	167
4.3.1. Elementy algebry liniowej	167
4.3.2. Pochodne cząstkowe	172

4.3.3.	Pochodna Fréchet’a	173
4.3.4.	Pochodna kierunkowa	176
4.3.5.	Zastosowania różniczki i pochodnej	180
4.3.6.	Pochodna funkcji złożonej	183
4.3.7.	Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	185
4.3.8.	Pochodne w przestrzeniach unormowanych	187
4.3.9.	Operatory teorii pola	188
	Zadania	189
4.4.	Ekstrema funkcji	192
4.4.1.	Wzór Taylora	192
4.4.2.	Ekstrema lokalne	194
4.4.3.	Ekstrema globalne	200
	Zadania	201
4.5.	Twierdzenie o funkcji odwrotnej i jego zastosowania	202
4.5.1.	Twierdzenie o funkcji odwrotnej	202
4.5.2.	Twierdzenie o funkcji uwikłanej	208
4.5.3.	Powierzchnie	213
4.5.4.	Powierzchnie domknięte i kawałkami gładkie	220
4.4.5.	Ekstrema warunkowe	222
	Zadania	229
Rozdział V. Całki		231
5.1.	Całka nieoznaczona	231
5.1.1.	Definicja całki nieoznaczonej	231
5.1.2.	Podstawowe całki	232
5.1.3.	Całkowanie przez części	233
5.1.4.	Całkowanie przez podstawienie	235
5.1.5.	Całkowanie funkcji wymiernych	237
5.1.6.	Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych	242
	Zadania	247
5.2.	Całka oznaczona	248
5.2.1.	Definicja całki oznaczonej	248
5.2.2.	Całkowalność funkcji	251
5.2.3.	Własności całki oznaczonej	254
5.2.4.	Związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną	256
5.2.5.	Zastosowania geometryczne całki	257
5.2.6.	Całki niewłaściwe i ich zastosowania	262
5.2.7.	Twierdzenie o przejściu do granicy pod znakiem całki	264
5.2.8.	Różniczkowanie całki zależnej od parametru	267
5.2.9.	Uogólnienia: całka Riemanna–Stieltjesa i całka z funkcji o wartościach w \mathbb{R}^n	269
5.2.10.	Funkcje specjalne	270
	Zadania	270
5.3.	Całki wielokrotne	272
5.3.1.	Definicja całki wielokrotnej	272
5.3.2.	Całka iterowana i wzór Fubini’ego	274
5.3.3.	Całka wielokrotna po dowolnym zbiorze	278
5.3.4.	Zastosowania całek wielokrotnych	283
5.3.5.	Twierdzenie o zamianie zmiennych	287
	Zadania	294

5.4. Całki krzywoliniowe	296
5.4.1. Orientacja	296
5.4.2. Całka krzywoliniowa zorientowana	303
5.4.3. Całka krzywoliniowa niezorientowana	308
5.4.4. Związek całek zorientowanych i niezorientowanych	309
5.4.5. Zastosowania całek krzywoliniowych	310
5.4.6. Wzór Greena i pole potencjalne	311
Zadania	316
5.5. Całki powierzchniowe	317
5.5.1. Całka powierzchniowa niezorientowana	317
5.5.2. Całka powierzchniowa zorientowana	320
5.5.3. Twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego	322
5.5.4. Twierdzenie Stokesa	324
5.5.5. Równanie Poissona	327
Zadania	331
 <i>Rozdział VI. Funkcje zespolone</i>	333
6.1. Pochodna i całka	333
6.1.1. Pochodna zespolona	333
6.1.2. Równania Cauchy’ego–Riemanna	336
6.1.3. Całka zespolona	338
6.1.4. Twierdzenie całkowe Cauchy’ego	340
Zadania	344
6.2. Własności funkcji analitycznych	345
6.2.1. Wzór całkowy Cauchy’ego	345
6.2.2. Rozwijalność funkcji analitycznej w szereg potęgowy	346
6.2.3. Nierówności Cauchy’ego i zasada maksimum	349
6.2.4. Szereg Laurenta i punkty osobliwe	350
Zadania	354
6.3. Zastosowania funkcji analitycznych	355
6.3.1. Rachunek residuów	355
6.3.2. Funkcje harmoniczne	359
Zadania	365
 <i>Rozdział VII. Równania różniczkowe</i>	366
7.1. Metody rozwiązywania równań różniczkowych	366
7.1.1. Uwagi ogólne	366
7.1.2. Modele przyrodnicze prowadzące do równań różniczkowych zwyczajnych	366
7.1.3. Równanie o zmiennych rozdzielonych	368
7.1.4. Równanie zupełne	373
7.1.5. Równanie liniowe i równanie Bernoulliego	376
7.1.6. Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań pierwszego rzędu	380
7.1.7. Uwagi o efektywnym rozwiązywaniu równań różniczkowych	383
Zadania	383
7.2. Podstawowe twierdzenia	384
7.2.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	384
7.2.2. Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych	391
7.2.3. Ciągła zależność od warunków początkowych i parametru	393

7.2.4. Metoda małego parametru	396
7.2.5. Zastosowanie szeregów potęgowych w teorii równań różniczkowych	400
Zadania	402
7.3. Równania i układy równań liniowych	403
7.3.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	403
7.3.2. Układ liniowy jednorodny	404
7.3.3. Rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego	406
7.3.4. Układ jednorodny o stałych współczynnikach	407
7.3.5. Układ niejednorodny ze stałą macierzą A	416
7.3.6. Równanie liniowe	418
7.3.7. Równanie liniowe o stałych współczynnikach	419
7.3.8. Analiza równania drgań	426
Zadania	430
7.4. Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych	431
7.4.1. Równanie autonomiczne	431
7.4.2. Układ zachowawczy	434
7.4.3. Stabilność	436
7.4.4. Twierdzenie Liouville'a	439
Zadania	442
7.5. Elementarne wiadomości o równaniach cząstkowych	443
7.5.1. Równania cząstkowe pierwszego rzędu	443
7.5.2. Równania cząstkowe drugiego rzędu	447
Zadania	451
Rozdział VIII. Teoria całki Lebesgue'a	453
8.1. Przestrzeń z miarą	454
8.1.1. Zbiory mierzalne	454
8.1.2. Zbiory borelowskie	455
8.1.3. Miara	457
8.1.4. Miara Lebesgue'a	458
8.1.5. Miara zupełna	458
8.1.6. Własności miary	460
Zadania	462
8.2. Funkcje mierzalne	462
8.2.1. Definicja funkcji mierzalnej	462
8.2.2. Własności funkcji mierzalnych	463
8.2.3. Funkcje proste	465
Zadania	467
8.3. Całka Lebesgue'a	467
8.3.1. Definicja całki Lebesgue'a	467
8.3.2. Własności całki Lebesgue'a	469
8.3.3. Twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki	472
8.3.4. Całkowanie funkcji zespolonych	478
8.3.5. Całka Lebesgue'a w \mathbb{R}	480
Zadania	481
8.4. Szeregi Fouriera	482
8.4.1. Przestrzeń L^2	482
8.4.2. Przestrzeń unitarna i przestrzeń Hilberta	484
8.4.3. Układ ortonormalny	486

8.4.4. Szeregi Fouriera	490
8.4.5. Równanie Laplace'a w kole	492
Zadania	495
Rozdział IX. Dodatek	496
9.1. Transformacja Fouriera	496
9.1.1. Twierdzenie Fubiniego	496
9.1.2. Splot	497
9.1.3. Transformacja Fouriera	498
9.1.4. Odwrotna transformacja Fouriera	500
9.1.5. Równanie przewodnictwa cieplnego	502
Zadania	503
9.2. Transformacja Laplace'a	504
9.2.1. Definicja transformaty Laplace'a	504
9.2.2. Własności transformaty Laplace'a	506
9.2.3. Zastosowania transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych zwykłych	507
Zadania	509
9.3. Elementy rachunku wariacyjnego	509
9.3.1. Ekstrema funkcjonałów	509
9.3.2. Ekstremale funkcjonału działania	512
9.3.3. Przykłady	515
9.3.4. Związek rachunku wariacyjnego z mechaniką Newtona	522
Zadania	523
Literatura uzupełniająca	524
Skorowidz	526