Przedmowa

W tej niedużej książce zajmujemy się przede wszystkim tymi działami „zaawansowanej analizy”, w której subtelność pojęć i metod narzuca ścisłość trudną do osiągnięcia na elementarnym poziomie. W przyjętym tu podejściu posługujemy się najprostszymi ujęciami nowoczesnych metod napotykanych w wyrafinowanych teoriach matematycznych. Wymagany zasób wiadomości obejmuje materiał semestralnego wykładu algebry liniowej, pobieżną znajomość teoriomnogościowych oznaczeń i materiał dość porządnego pierwszorocznego wykładu analizy (na którym co najmniej wspomina się o kresie górnym (sup) i kresie dolnym (inf) podzbioru zbioru liczb rzeczywistych). Ponadto nieomal zasadniczym okaże się pewne (choćby zaczątkowe) oswojenie się z abstrakcyjną matematyką.

Pierwsza połowa książki obejmuje tę prostą część zaawansowanej analizy, która uogólnia elementarną analizę na wyższe wymiary. W rozdziale 1 podajemy wiadomości wstępne, a w rozdziałach 2 i 3 zajmujemy się różniczkowaniem i całkowaniem.

Reszta książki poświęcona jest badaniu krzywych, powierzchni i ich wyżej wymiarowych odpowiedników. Tu ujęcia nowoczesne i klasyczne wyraźnie rozchodzą się; oczywiście istnieje wiele punktów styku i jedna z ważniejszych zbieżności pojawia się w ostatnim paragrafie. Najbardziej klasyczne równanie związane z całkowaniem na rozmaitościach jest jednocześnie ostatnim twierdzeniem w tej książce. Twierdzenie to (twierdzenie Stokesa) ma bardzo ciekawą historię i uległo uderzającej metamorfozie.

Pierwsze sformułowanie tego twierdzenia pojawia się jako postscriptum do listu sir Williama Thompsona (lorda Kelvina) do Stokesa, noszącego datę 2 lipca 1850 r. Publicznie pojawia się ono na konkursowym egzaminie o nagrodę Smitha w 1854 r. jako zadanie 8. Ten coroczny egzamin konkursowy dla najlepszych studentów matematyki na Uniwersytecie w Cambridge przeprowadzał w latach 1849-1882 profesor Stokes; nim umarł, wynik znano powszechnie jako twierdzenie Stokesa. Jego współcześni podali co najmniej trzy dowody: jeden opublikował Thompson, inny pojawił się w *Treatise on Natural Philosophy* Thompsona i Taita, a jeszcze inny podał Maxwell w *Electricity and Magnetism* [13]. Od tego czasu nazwisko Stokesa powiązano z o wiele ogólniejszymi wynikami, które miały tak wybitne znaczenie w rozwoju pewnych działów matematyki, że twierdzenie Stokesa może być przedmiotem studium wartości uogólnienia.

W tej książce podano trzy postacie twierdzenia Stokesa. Wersja znana Stokesowi pojawia się w ostatnim paragrafie, wraz ze swoimi nieodłącznymi towarzyszami, twierdzeniem Greena i twierdzeniem o dywergencji([1]). Te trzy twierdzenia, klasyczne twierdzenia z podtytułu książki, wyprowadza się zupełnie łatwo z nowoczesnego twierdzenia Stokesa, które pojawia się wcześniej w rozdziale 5. To, co klasyczne twierdzenia orzekają dla krzywych i powierzchni, nowoczesne twierdzenie Stokesa orzeka dla ich wyżej wymiarowych odpowiedników (rozmaitości), które są dokładnie badane w pierwszej części rozdziału 5. To badanie rozmaitości, które można by było usprawiedliwić choćby samą ważnością rozmaitości w nowoczesnej matematyce, nie wymaga w istocie większego wysiłku niż wymagałoby samo staranne badanie krzywych i powierzchni.

([1]) W polskiej literaturze matematycznej twierdzenie o dywergencji występuje najczęściej pod nazwą twierdzenia Gaussa lub twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego (*przyp. tłum.*).

Czytelnik prawdopodobnie podejrzewa, że nowoczesne twierdzenie Stokesa jest co najmniej tak trudne jak wyprowadzane z niego klasyczne twierdzenia. Jest jednak wręcz odwrotnie, twierdzenie to jest bardzo prostą konsekwencją jeszcze innej wersji twierdzenia Stokesa; ta bardzo abstrakcyjna wersja jest końcowym i głównym wynikiem rozdziału 4. Całkowicie rozsądnym jest przypuszczenie, że omijane dotychczas trudności muszą kryć się właśnie tutaj. Jednakże dowód tego twierdzenia jest w pojęciu matematyka zupełną trywialnością – bezpośrednim rachunkiem. Z drugiej strony, nie można zrozumieć nawet sformułowania tej trywialności bez całego stada trudnych definicji z rozdziału 4. Istnieją ważkie przyczyny, dla których twierdzenia powinny być całkiem łatwe, a definicje trudne. Jak ujawnia ewolucja twierdzenia Stokesa, jakaś jedna prosta zasada może nakładać maskę wielu trudnych wyników; dowodzenie wielu twierdzeń wymaga jedynie zdejmowania tej maski. Z drugiej strony, definicje służą dwojakim celom: dzięki swojej ścisłości zajmują miejsce niejasnych pojęć i stanowią aparaturę do przeprowadzania eleganckich dowodów. W pierwszych dwóch paragrafach rozdziału 4 definiujemy dokładnie i dowodzimy reguł posługiwania się tym, co klasycznie opisuje się jako „wyrażenia postaci” $Pdx + Qdy + Rdz$ lub $Pdxdy + Qdydz + Rdzdx$. Zdefiniowane w trzecim paragrafie łańcuchy i rozkłady jedności (wprowadzone już w rozdziale 3) uwalniają nasze dowody od konieczności posiekania rozmaitości na małe kawałki; sprowadzają one zagadnienia dotyczące rozmaitości, gdzie wszystko wydaje się trudne, do zagadnień dotyczących przestrzeni euklidesowej, gdzie wszystko jest łatwe.

Niewątpliwie, skoncentrowanie w definicjach esencji tematyki jest ekonomiczne, ale musi stwarzać pewne trudności dla czytelnika. Mam nadzieję, że zachętą do dokładnego przestudiowania rozdziału 4 będzie zapewnienie, że wyniki wykażą opłacalność tego wysiłku. Klasyczne twierdzenia z ostatniego paragrafu to tylko niektóre i bynajmniej nie najważniejsze zastosowania rozdziału 4; wiele innych zastosowań znajduje się w zadaniach, a dalsze osiągnięcia napotka się przy czytaniu książek podanych w bibliografii.

Zarówno zadania, jak i bibliografia zasługują na parę słów omówienia. Zadania pojawiają się po każdym paragrafie i są numerowane (tak jak twierdzenia) w obrębie poszczególnych rozdziałów. Zadania, których wyniki wykorzystuje się w tekście, są opatrzone gwiazdką, ale te środki bezpieczeństwa powinny być zbędne, jako że zadania są najważniejszą częścią tej książki i czytelnik powinien przynajmniej spróbować rozwiązać je wszystkie. Bibliografia musiała z konieczności być albo bardzo niepełna, albo nieporęczna, bowiem uzasadnione byłoby polecenie połowy głównych gałęzi matematyki jako rozsądnego przedłużenia materiału tej książki. Zdecydowałem się uczynić bibliografię niepełną, lecz zachęcającą.

Przy pisaniu tej książki podano wiele krytycznych uwag i sugestii. Jestem szczególnie wdzięczny Richardowi Palais, Hugonowi Rossiemu, Robertowi Seeley’owi i Charlesowi Stenardowi za ich liczne pomocne komentarze.

Wykorzystałem to wydanie jako okazję do poprawienia wielu błędów drukarskich i pomniejszych pomyłek wskazanych mi przez pobłażliwych czytelników. Ponadto całkowicie zrewidowano i poprawiono materiał następujący po twierdzeniu 3.11. Inne ważne zmiany, których nie można było włączyć do tekstu bez nadmiernych poprawek, są wyliczone w dodatku na końcu książki ([2]).

Michael Spivak

Waltham, Massachusetts
Marzec 1968

([2]) W tłumaczeniu włączono do tekstu wszystkie uwagi z dodatku z wyjątkiem jednej, zamieszczonej jako przypis autorski na s. 54 (*przyp. tłum.*).