

## Rozdział XV

### CAŁKI KRZYWOLINIOWE. CAŁKA STIELTJESA

#### § 1. Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju

- 543. Definicja całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju **5**
- 544. Sprowadzanie całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju do zwykłej całki oznaczonej **7**
- 545. Przykłady **8**

#### § 2. Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju

- 546. Definicja całek krzywoliniowych drugiego rodzaju **12**
- 547. Istnienie całki krzywoliniowej drugiego rodzaju i obliczanie tej całki **14**
- 548. Przypadek krzywej zamkniętej. Orientacja płaszczyzny **16**
- 549. Przykłady **18**
- 550. Przybliżanie całki krzywoliniowej przez całkę po łamanej **20**
- 551. Obliczanie pól za pomocą całek krzywoliniowych **21**
- 552. Przykłady **24**
- 553. Związek pomiędzy całkami krzywoliniowymi obu rodzajów **27**
- 554. Zadania fizyczne **29**

#### § 3. Warunki niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania

- 555. Postawienie zagadnienia; związek z różniczką zupełną **33**
- 556. Różniczkowanie całki niezależnej od drogi całkowania **34**
- 557. Obliczanie całki krzywoliniowej przy pomocy pierwotnej **36**
- 558. Kryterium na różniczkę zupełną; znajdowanie pierwotnej, gdy obszar jest prostokątem **37**
- 559. Uogólnienie na przypadek dowolnego obszaru **39**
- 560. Wyniki końcowe **41**
- 561. Całki po krzywych zamkniętych **42**
- 562. Przypadek obszaru niejednostopijnego; występowanie punktów osobliwych **43**
- 563. Całka Gaussa **47**
- 564. Przypadek trójwymiarowy **50**
- 565. Przykłady **51**
- 566. Zastosowanie do zadań fizycznych **56**

#### § 4. Funkcje o wahanii ograniczonym

- 567. Definicja funkcji o wahanii ograniczonym **58**
- 568. Klasy funkcji o wahanii ograniczonym **59**
- 569. Własności funkcji o wahanii ograniczonym **62**
- 570. Kryteria na funkcje o wahanii ograniczonym **64**
- 571. Funkcje ciągle o wahanii ograniczonym **66**
- 572. Krzywe prostowalne **69**

#### § 5. Całka Stieltjesa

- 573. Definicja całki Stieltjesa **70**
- 574. Ogólne warunki istnienia całki Stieltjesa **71**
- 575. Przypadki istnienia całki Stieltjesa **72**
- 576. Własności całki Stieltjesa **75**
- 577. Całkowanie przez części **76**
- 578. Sprowadzenie całki Stieltjesa do całki Riemanna **78**
- 579. Obliczanie całek Stieltjesa **79**
- 580. Przykłady **83**
- 581. Ilustracja geometryczna całki Stieltjesa **87**
- 582. Twierdzenie o wartości średniej, oszacowania **88**
- 583. Przechodzenie do granicy pod znakiem całki Stieltjesa **90**
- 584. Przykłady i uzupełnienia **91**
- 585. Sprowadzanie całki krzywoliniowej drugiego rodzaju do całki Stieltjesa **95**

## Rozdział XVI

### CAŁKI PODWÓJNE

#### § 1. Definicja i najprostsze własności całki podwójnej

- 586. Zagadnienie objętości walca krzywoliniowego **97**
- 587. Sprowadzanie całki podwójnej do iterowanej **98**
- 588. Definicja całki podwójnej **100**
- 589. Warunki istnienia całki podwójnej **101**
- 590. Klasy funkcji całkownych **102**
- 591. Całka górna i dolna jako odpowiednie granice **104**
- 592. Własności funkcji całkownych i całek podwójnych **105**
- 593. Całka jako addytywna funkcja obszaru; różniczkowanie po obszarze **107**

#### § 2. Obliczanie całki podwójnej

- 594. Sprowadzanie całki podwójnej do iterowanej w przypadku prostokąta **110**
- 595. Przykłady **113**
- 596. Sprowadzenie całki podwójnej do iterowanej w przypadku obszaru krzywoliniowego **119**
- 597. Przykłady **122**
- 598. Zastosowania do mechaniki **132**
- 599. Przykłady **134**

#### § 3. Wzór Greena

- 600. Wyprowadzenie wzoru Greena **140**
- 601. Zastosowanie wzoru Greena do badania całek krzywoliniowych **144**
- 602. Przykłady i uzupełnienia **145**

#### § 4. Zamiana zmiennych w całce podwójnej

- 603. Przekształcanie obszarów płaskich **147**
- 604. Przykłady **150**
- 605. Wyrażenie pola we współrzędnych krzywoliniowych **154**
- 606. Uwagi dodatkowe **156**
- 607. Wyprowadzenie geometryczne **158**
- 608. Przykłady **160**
- 609. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych **167**
- 610. Analogia ze zwykłą całką. Całka po obszarze zorientowanym **169**
- 611. Przykłady **170**

#### § 5. Całki podwójne niewłaściwe

- 612. Całki rozciągnięte na obszar nieograniczony **176**
- 613. Twierdzenie o zbieżności bezwzględnej całki podwójnej niewłaściwej **178**
- 614. Sprowadzenie całki podwójnej do iterowanej **179**
- 615. Całki z funkcji nieograniczonych **181**
- 616. Zamiana zmiennych w całkach niewłaściwych **183**
- 617. Przykłady **184**

## Rozdział XVII

### POLE POWIERZCHNI. CAŁKI POWIERZCHNIOWE

#### § 1. Powierzchnie dwustronne

- 618. Strona powierzchni **197**
- 619. Przykłady **198**
- 620. Orientacja powierzchni i przestrzeni **200**
- 621. Wybór znaku we wzorach na cosinusy kierunkowe normalnej **201**
- 622. Przypadek powierzchni kawałkami gładkiej **202**

#### § 2. Pole powierzchni krzywoliniowej

- 623. Przykład Schwarza **203**
- 624. Definicja pola powierzchni krzywoliniowej **206**
- 625. Uwaga **206**
- 626. Istnienie pola powierzchni. Obliczanie pola **208**
- 627. Przybliżanie pola przy pomocy powierzchni wielościennych wpisanych **212**
- 628. Szczególny przypadek definicji pola **213**
- 629. Przykłady **214**

### **§ 3. Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju**

- 630. Definicja całki powierzchniowej pierwszego rodzaju **226**
- 631. Sprowadzenie do zwykłej całki podwójnej **227**
- 632. Zastosowanie całek powierzchniowych pierwszego rodzaju w mechanice **229**
- 633. Przykłady **230**

### **§ 4. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju**

- 634. Definicja całki powierzchniowej drugiego rodzaju **236**
- 635. Najprostsze przypadki szczególne **238**
- 636. Przypadek ogólny **239**
- 637. Jeden ze szczegółów dowodu **241**
- 638. Wyrażenie objętości bryły przez całkę powierzchniową **242**
- 639. Wzór Stokesa **245**
- 640. Przykłady **248**
- 641. Zastosowanie wzoru Stokesa do badania całek krzywoliniowych w przestrzeni **252**

## **Rozdział XVIII**

### **CAŁKI POTRÓJNE I WIELOKROTNE**

#### **§ 1. Całka potrójna i jej obliczanie**

- 642. Zagadnienie obliczania masy bryły **255**
- 643. Całka potrójna i warunki jej istnienia **256**
- 644. Własności funkcji całkownych i całek potrójnych **257**
- 645. Obliczanie całki potrójnej po prostopadłością **258**
- 646. Obliczanie całki potrójnej po obszarze dowolnym **260**
- 647. Całki potrójne niewłaściwe **261**
- 648. Przykłady **262**
- 649. Zastosowania w mechanice **268**
- 650. Przykłady **269**

#### **§ 2. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego**

- 651. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego **275**
- 652. Zastosowanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego do badania całek powierzchniowych **278**
- 653. Całka Gaussa **279**
- 654. Przykłady **280**

#### **§ 3. Zamiana zmiennych w całkach potrójnych**

- 655. Przekształcanie obszarów przestrzennych; współrzędne krzywoliniowe **283**
- 656. Przykłady **284**
- 657. Wyrażenie objętości we współrzędnych krzywoliniowych **286**
- 658. Uwagi dodatkowe **289**
- 659. Wyprowadzenie geometryczne **290**
- 660. Przykłady **291**
- 661. Zamiana zmiennych w całce potrójnej **298**
- 662. Przykłady **299**
- 663. Ciężenie grawitacyjne. Potencjał punktu wewnętrznego **303**

#### **§ 4. Elementy analizy wektorowej**

- 664. Skalary i wektory **305**
- 665. Pola skalarne i wektorowe **306**
- 666. Gradient **307**
- 667. Strumień wektora przez powierzchnię **308**
- 668. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego. Dywergencja **309**
- 669. Cyrkulacja wektora. Wzór Stokesa. Rotacja **311**
- 670. Pola potencjalne i bezźródłowe **312**
- 671. Zagadnienie odwrotne w analizie wektorowej **315**
- 672. Zastosowania **316**

#### **§ 5. Całki wielokrotne**

- 673. Zagadnienie grawitacji i potencjału dwóch ciał **321**
- 674. Objętość bryły  $n$ -wymiarowej, całka  $n$ -krotna **322**
- 675. Zamiana zmiennych w całce  $n$ -krotnej **324**
- 676. Przykłady **327**

## Rozdział XIX

### SZEREGI FOURIERA

#### § 1. Wstęp

- 677. Wielkości okresowe i analiza harmoniczna **347**
- 678. Określanie współczynników metodą Eulera-Fouriera **349**
- 679. Ortogonalne układy funkcji **352**
- 680. Interpolacja trygonometryczna **356**

#### § 2. Rozwijanie funkcji w szereg Fouriera

- 681. Postawienie zagadnienia. Całka Dirichleta **358**
- 682. Pierwszy lemat podstawowy **360**
- 683. Zasada lokalizacji **362**
- 684. Kryteria Diniego i Lipschitza zbieżności szeregów Fouriera **363**
- 685. Drugi lemat podstawowy **366**
- 686. Kryterium Dirichleta-Jordana **368**
- 687. Przypadek funkcji nieokresowej **369**
- 688. Przypadek przedziału dowolnego **371**
- 689. Rozwinięcia w szeregi cosinusów i w szeregi sinusów **372**
- 690. Przykłady **375**
- 691. Rozwinięcie  $\ln \Gamma(x)$  **387**

#### § 3. Uzupełnienia

- 692. Szeregi o współczynnikach malejących **390**
- 693. Sumowanie szeregów trygonometrycznych przy pomocy funkcji analitycznych zmiennej zespolonej **395**
- 694. Przykłady **397**
- 695. Postać zespolona szeregów Fouriera **401**
- 696. Szereg sprzężony **404**
- 697. Wielokrotne szeregi Fouriera **407**

#### § 4. Charakter zbieżności szeregów Fouriera

- 698. Niektóre uzupełnienia do podstawowych lematów **408**
- 699. Kryteria zbieżności jednostajnej szeregów Fouriera **411**
- 700. Zachowanie się szeregów Fouriera w pobliżu punktu nieciągłości. Przypadek szczególny **413**
- 701. Przypadek funkcji dowolnej **417**
- 702. Osobliwości szeregów Fouriera; uwagi wstępne **419**
- 703. Tworzenie osobliwości **422**

#### § 5. Oszacowanie reszty w zależności od własności pochodnych funkcji

- 704. Związek między współczynnikami Fouriera funkcji i jej pochodnych **424**
- 705. Oszacowanie sumy częściowej w przypadku funkcji ograniczonej **425**
- 706. Oszacowanie reszty w przypadku funkcji o  $k$ -tej pochodnej ograniczonej **426**
- 707. Przypadek funkcji, której  $k$ -ta pochodna ma wahanie ograniczone **428**
- 708. Wpływ nieciągłości funkcji i jej pochodnych na rząd maleńcia współczynników Fouriera **429**
- 709. Przypadek funkcji danej w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$  **434**
- 710. Metoda wydzielenia osobliwości **435**

#### § 6. Całka Fouriera

- 711. Całka Fouriera jako przypadek graniczny szeregu Fouriera **442**
- 712. Uwagi wstępne **444**
- 713. Warunki dostateczne **445**
- 714. Modyfikacja podstawowego założenia **447**
- 715. Różne postacie wzoru Fouriera **449**
- 716. Przekształcenie Fouriera **451**
- 717. Niektóre własności przekształcenia Fouriera **453**
- 718. Przykłady i uzupełnienia **454**
- 719. Przypadek funkcji dwu zmiennych **460**

#### § 7. Zastosowania

- 720. Wyrażenie anomalii ekscentrycznej planety przez anomalię średnią **462**
- 721. Zagadnienie drgań struny **463**
- 722. Zagadnienie rozchodzenia się ciepła w skończonym pręcie **468**
- 723. Przypadek pręta nieskończonego **471**
- 724. Modyfikacja warunków brzegowych **473**
- 725. Rozchodzenie się ciepła w kołowej płytce **474**

- 726. Praktyczna analiza harmoniczna. Schemat dla dwunastu rzędnych **476**
- 727. Przykłady **478**
- 728. Schemat dla dwudziestu czterech rzędnych **481**
- 729. Przykłady **482**
- 730. Porównanie przybliżonych i dokładnych wartości współczynników Fouriera **483**

## **Rozdział XX**

### **SZEREGI FOURIERA (ciąg dalszy)**

#### **§ 1. Operacje na szeregach Fouriera. Zupełność i zamkniętość**

- 731. Całkowanie szeregu Fouriera wyraz po wyrazie **486**
- 732. Różniczkowanie szeregu Fouriera wyraz po wyrazie **488**
- 733. Zupełność układu trygonometrycznego **489**
- 734. Przybliżanie jednostajne funkcji. Twierdzenie Weierstrassa **491**
- 735. Przeciętne przybliżanie funkcji. Ekstremalne własności sum częściowych szeregu Fouriera **493**
- 736. Zamkniętość układu trygonometrycznego. Twierdzenie Lapunowa **496**
- 737. Uogólnione równanie zamkniętości **499**
- 738. Mnożenie szeregów Fouriera **501**
- 739. Niektóre zastosowania równania zamkniętości **502**

#### **§ 2. Zastosowanie metod uogólnionego sumowania do szeregów Fouriera**

- 740. Lemat podstawowy **507**
- 741. Sumowanie szeregów Fouriera metodą Poissona-Abela **509**
- 742. Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla koła **512**
- 743. Sumowanie szeregów Fouriera metodą Cesàro-Fejéra **514**
- 744. Niektóre zastosowania uogólnionego sumowania szeregów Fouriera **516**
- 745. Różniczkowanie szeregów Fouriera wyraz po wyrazie **517**

#### **§ 3. Jednoznaczność rozwinięcia trygonometrycznego funkcji**

- 746. Dodatkowe uwagi o pochodnych uogólnionych **519**
- 747. Metoda Riemanna sumowania szeregu trygonometrycznego **522**
- 748. Lemat o współczynnikach szeregu zbieżnego **526**
- 749. Jednoznaczność rozwinięcia trygonometrycznego **527**
- 750. Końcowe twierdzenia o szeregach Fouriera **528**
- 751. Uogólnienie **531**

## **Uzupełnienie**

### **OGÓLNY PUNKT WIDZENIA NA GRANICĘ**

- 752. Różne typy granic występujących w analizie **535**
- 753. Zbiory uporządkowane (w zwykłym znaczeniu) **536**
- 754. Zbiory uporządkowane (w znaczeniu uogólnionym) **537**
- 755. Zmienna uporządkowana i jej granica **539**
- 756. Przykłady **540**
- 757. Uwaga o granicy funkcji **542**
- 758. Rozszerzenie teorii granic **543**
- 759. Zmienne jednakowo uporządkowane **545**
- 760. Uporządkowanie przy pomocy parametru liczbowego **546**
- 761. Sprowadzenie do zmiennej **548**
- 762. Granica górna i dolna zmiennej uporządkowanej **549**

**Skorowidz 552**