Wstęp

Niniejsza książka jest podręcznikiem akademickim adresowanym do studentów uczelni ekonomicznych, uniwersyteckich wydziałów ekonomii, zarządzania i finansów, a także innych szkół wyższych, które umożliwiają poznanie podstaw wiedzy o gospodarce, finansach i bankowości. Może służyć jako podstawowa literatura dla słuchaczy podyplomowych studiów w zakresie bankowości, inwestycji, zarządzania i ubezpieczeń. Z pewnością będzie również przydatna pracownikom sektora bankowości i ubezpieczeń, osobom zajmującym się zarządzaniem finansami czy doradztwem finansowym. Do zrozumienia większości materiału tej książki wystarczy znajomość matematyki z zakresu szkoły średniej i podstaw analizy matematycznej, jedynie do końcowych rozdziałów potrzebna jest wiedza z rachunku prawdopodobieństwa.

Koncepcja tej książki, jej treść, struktura i metoda prezentacji są wynikiem dydaktycznego doświadczenia autorek, wykładających matematykę finansową w Szkole Głównej Handlowej w Warszawie. W celu ułatwienia Czytelnikowi przyswojenia materiału lub zasygnalizowania pewnych niuansów w pracy zamieszczono wiele przykładów liczbowych, pokazujących sposoby dojścia do rozwiązania, interpretację wyników, kierunek dalszego wnioskowania, a także aspekty numeryczne. Do przykładów autorki przywiązują dużą wagę, ponieważ po latach pracy ze studentami wiedzą, że bardzo często przykład lepiej tłumaczy istotę problemu niż skomplikowane wyjaśnienia teoretyczne. Każdy rozdział zawiera też zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania, a odpowiedzi do nich znajdują się na końcu książki.

Głównym nurtem książki jest formalny opis pojęć i omówienie ich własności, lecz celowo nie są analizowane przypadki nie mające znaczenia dla praktyki obliczeń finansowych. Z tego względu na ogół zakłada się, że wartość kapitału czy stopy procentowe są dodatnie. Nie zmniejsza to ogólności rozważań z punktu widzenia zastosowań finansowych, a uwalnia autorki od ciągłego przypominania o spełnieniu założeń formalnych, np. o niezerowej wartości dzielnika czy o dodatniej wartości liczby logarytmowanej. Efektem podporządkowania koncepcji książki potrzebom współczesnej praktyki finansowej jest poświęcenie mniejszej uwagi tym operacjom i instrumentom, które choć mają długi historyczny rodowód, nie odgrywają już tak dużej roli jak kiedyś. Dotyczy to zwłaszcza ciągów płatności związanych z oprocentowaniem prostym. Bardziej szczegółowo są za to przedstawione metody oprocentowania ciągłego, które obecnie są stosowane rzadko, lecz ich walory pozwalają sądzić, że przeniesienie ich z teorii do praktyki jest jedynie kwestią czasu.

Jeszcze w połowie minionego wieku matematyka finansowa nie wykraczała poza historycznie ukształtowane i stosowane w praktyce metody oprocentowania i dyskontowania, analizowane na podstawie ciągu arytmetycznego lub geometrycznego. Od tego czasu w świecie finansów zaszły przeobrażenia, które zasługują na miano rewolucyjnych, takie jak: pojawienie się nowych kontraktów i instrumentów finansowych, dynamiczny rozwój rynków terminowych, pieniężnych i walutowych, globalizacja rynków, czemu towarzyszy i sprzyja niebywale szybki postęp w zakresie technik komputerowych i informatyki. Zróżnicowanie i skala działalności współczesnych instytucji finansowych są nieporównywalnie większe niż kilkadziesiąt lat temu, a obszar działania tych instytucji obejmuje teraz wielką różnorodność operacji i instrumentów, zarówno nowych jak i tradycyjnych.

W ślad za zmianami rzeczywistości finansowej nastąpił, i nadal trwa, burzliwy rozwój matematyki finansowej. Jednak w literaturze wciąż inaczej postrzegana jest teoria matematyki finansowej, gdy chodzi o tradycyjne operacje i instrumenty, a inaczej, gdy chodzi o operacje i instrumenty z ostatniego czasu. Książka ta przedstawia matematykę finansową jako jedną teorię, opartą na tych samych głównych założeniach przy rozpatrywaniu zagadnień zarówno tradycyjnych, jak i najnowszych. Założenia te określa się mianem zasad matematyki finansowej. Odgrywają one rolę porównywalną do aksjomatów w matematyce. Do najważniejszych zasad matematyki finansowej należy zasada oprocentowania składanego, zasada równoważności stóp procentowych i zasada równoważności kapitałów. Jednorodność

wykładu tradycyjnej i nowoczesnej matematyki finansowej wynika z możności analizy dowolnej operacji finansowej jako inwestycji w określony instrument. Inwestycją finansową jest nie tylko np. kupno obligacji czy instrumentu pochodnego; także lokatę bankową, udzielenie kredytu albo zdyskontowanie weksla można traktować jako inwestycję. Inwestycyjne ujęcie matematyki finansowej ma zasadnicze znaczenie dla praktyki. Skoro obszar działalności współczesnych instytucji finansowych obejmuje zarówno formy tradycyjne, jak i nowoczesne, ocena ich efektywności musi się opierać na porównywalnych, wystandaryzowanych miernikach. A to staje się możliwe po sprowadzeniu różnych form działalności finansowej do „wspólnego mianownika", właśnie poprzez uznanie każdej z nich za pewien typ inwestycji finansowej.

Przedmiotem pierwszych czterech rozdziałów książki jest rachunek zmian wartości kapitału w czasie, oparty na zasadach oprocentowania i dyskontowania prostego oraz składanego. Wprowadzona jest zasada równoważności stóp procentowych i zasada równoważności kapitałów. Pełne ich zrozumienie i nabycie umiejętności sprawnego stosowania są konieczne zarówno przy prostych, jak i przy bardziej skomplikowanych analizach. Dlatego specjalnie akcentowane są warunki stosowania tych zasad oraz – co nie mniej ważne – praktyczne konsekwencje niespełnienia określonych warunków.

Rachunek rent, czyli metody wyceny deterministycznego ciągu płatności, stanowi ważny obszar matematyki finansowej ze względu na liczne i różnorodne zastosowania – od rachunku systematycznego oszczędzania i ratalnej spłaty długu do wyceny obligacji kuponowych. Zagadnieniom klasyfikacji rent i ich wyceny jest poświęcony rozdział 5.

W rozdziale 6 przedstawiono ratalną spłatę długu, przy czym głównym przedmiotem rozważań jest spłata zgodna z zasadą równoważności kapitałów, oparta na zasadzie oprocentowania składanego. Takie ujęcie umożliwia traktowanie kredytów i pożyczek jako inwestycji finansowych, a w konsekwencji – ich analizę przy użyciu narzędzi z dziedziny analizy inwestycji. Jako uniwersalna miara kosztu spłaty długu jest przedstawiona rzeczywista stopa procentowa, wyprowadzona z koncepcji wewnętrznej stopy zwrotu z inwestycji, od dawna stosowana w krajach Unii Europejskiej, a od 2002 r. również w Polsce.

Podstawowe narzędzia ilościowe służące do oceny deterministycznych inwestycji finansowych są przedstawione w rozdziale 7. Poza omówieniem definicji i zbadaniem własności tych mierników szczególnie wiele uwagi poświęcono ich interpretacji oraz warunkom, w jakich dopuszczalne jest ich stosowanie.

Zagadnienia ostatnich, dwóch rozdziałów wychodzą poza obszar tradycyjnej matematyki finansowej, opartej na deterministycznym rachunku zmian wartości kapitału w czasie. Przedmiotem rozdziału 8 jest losowa stopa procentowa o rozkładzie logarytmiczno-normalnym w przypadku oprocentowania okresowego lub normalnym w przypadku oprocentowania ciągłego, a także szczegółowe własności rozkładu losowej wartości kapitału końcowego i początkowego w obu przypadkach. Rozdział ten stanowi uogólnienie klasycznych zagadnień rachunku wartości kapitału w czasie w wyniku zastąpienia deterministycznej stopy procentowej stopą traktowaną jako zmienna losowa.

Ostatni, obszerny rozdział 9 jest poświęcony zagadnieniom modelowania wartości instrumentów pochodnych. W odróżnieniu od tradycyjnych inwestycji finansowych, omówionych w rozdziale 7, instrumenty pochodne generują płatności o nieznanej z góry wartości, w konsekwencji czego modelowanie ich wyceny wymaga stosowania odpowiednio zaadaptowanej zasady równoważności kapitałów. W rozdziale tym Czytelnik zapozna się z przeglądem podstawowych rodzajów instrumentów pochodnych z punktu widzenia specyfiki kontraktu i sprawiedliwej jego wyceny, wyprowadzonej w warunkach braku możliwości arbitrażowych.

W praktyce finansowej stosowane są dwa warianty rachunku czasu: rachunek zgodny z czasem rzeczywistym oraz rachunek w tzw. czasie bankowym. Ich opis oraz konsekwencje stosowania są przedstawione w dodatku A. Znaczną część obliczeń finansowych, zwłaszcza mniej złożonych, można wykonać przy użyciu kalkulatora – zwykłego lub finansowego, do wielu jednak potrzebny jest komputer. Czytelnikowi, który zna arkusz kalkulacyjny Excel, proponujemy posługiwanie się funkcjami finansowymi tego arkusza. Ich opis, wraz z odpowiednimi przykładami, znajduje się w dodatku B.